

|             |   |
|-------------|---|
| Title       | バーゼル問題とオイラー (数学史の研究)  |
| Author(s)   | 杉本, 敏夫  |
| Citation    | 数理解析研究所講究録 (2008), 1583: 159-167  |
| Issue Date  | 2008-02   |
| URL         | <a href="http://hdl.handle.net/2433/81470">http://hdl.handle.net/2433/81470</a> |
| Right       |   |
| Type        | Departmental Bulletin Paper   |
| Textversion | publisher   |

バーゼル問題とオイラー  
The Basel-Problem and Leonhald Euler  
(2007年 8 月23日)

杉本敏夫 (Sugimoto Toshio)

第 1 節 バーゼル問題とは

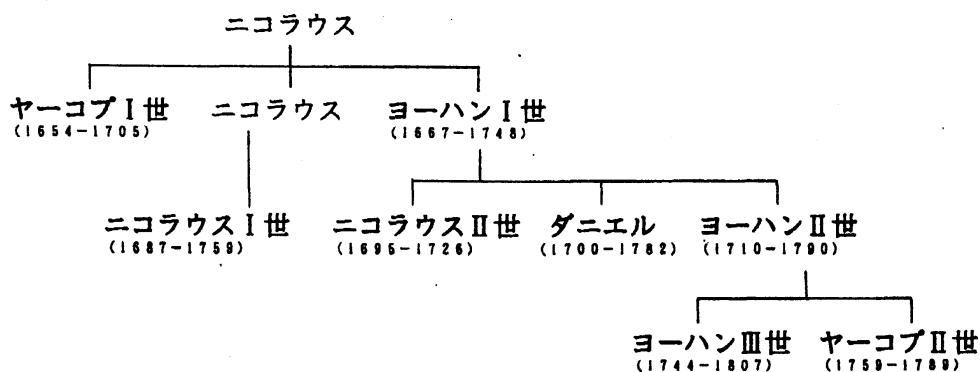
逆平方数の級数

$$(*1.1) \quad Q = 1/1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + 1/36 + \dots$$

の和はゼータ関数の最簡の例であり、レオンハルト・オイラー (1707-83) が創始者であることは周知である。

今回の報告は、 $Q$  の和の発見の経緯を主題とする。スイスのバーゼル在、ベルヌイ一族の長老であるヤーコプ・ベルヌイ (1654-1705) の努力にも拘わらず、この逆平方数の級数  $Q$  の和に限っては解けず、その解決を後世に託したため、「バーゼル問題」と呼ばれるようになった。優れた解説も多いなか、[1] ポリア、特にその第 I 巻、および [2] ヴェイユ、[3] ダンハムの著書を参照した。

ベルヌイ一族 (太字は数学者)



第 2 節 初等的な比較

ヤーコプ・ベルヌイは、[4] 「無限級数ノ扱ヒ」の中で、逆数級数

$$(*2.1) \quad U = 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots$$

の和が発散することを厳密に証明した。その他、巧妙な技法を駆使して、多くの級数の和を求めた。ヤーコプは、やや迂遠な推論の後、逆平方数の級数

$$(*2.2) \quad Q = 1/1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + 1/36 + \dots$$

が「和ノ知ラレタル他ノ級数〔次の  $T$  の 2 倍〕ヨリモ小ナル事ガ得ラレタルニモ拘ラス、其ノ和ヲ求ムル事ハ困難デアル。若シモ誰カガ、我々ノ努力カラ逃レタル事ヲ知ラセテ呉

レレバ、大イニ感謝シタイ」(原文がラテン語の時は、片仮名で表記する)と表明した。  
ヤーコプは何と謙虚なことであろうか。

現代では、望遠鏡の鏡筒の畳み込みに似て、長い級数の隣り合う項同士が互いに帳消しになる《望遠鏡級数》telescopic series

$$(*2\cdot3) \quad T = 1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 + 1/30 + \dots \\ = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/3 - 1/4) + (1/4 - 1/5) + (1/5 - 1/6) + \dots$$

が用いられる。その和は明らかに  $= 1$  である。 $1 + T$  と  $Q$  を項別に比較すれば、

$$1/4 < 1/2, \quad 1/9 < 1/6, \quad 1/16 < 1/12, \quad 1/25 < 1/20, \quad 1/36 < 1/30, \dots$$

から、 $Q < 1 + T = 2$  が出る。

ヤーコプの甥のダニエル・ベルヌイ(1700-82)は  $Q \sim 8/5$  を与え(1728)、同年クリスチアン・ゴルドバッハ(1690-1764)は  $41/25 < Q < 5/3$  を与えたと言われる。

私はそれを確かめるため、 $Q$  を様々に変形してみた(各値は元の  $Q$  に等しい)。

$$Q_1 = (1 + Q) - T \\ = 1 + (1 - 1/2) + (1/2)(1/2 - 1/3) + (1/3)(1/3 - 1/4) + \dots \\ = 1 + 1/1 \cdot 1 \cdot 2 + 1/2 \cdot 2 \cdot 3 + 1/3 \cdot 3 \cdot 4 + 1/4 \cdot 4 \cdot 5 + \dots$$

$$Q_2 = (1 + Q) - T \\ = 2 + (1/2)(1/2 - 1) + (1/3)(1/3 - 1/2) + (1/4)(1/4 - 1/3) + \dots \\ = 2 - 1/1 \cdot 2 \cdot 2 - 1/2 \cdot 3 \cdot 3 - 1/3 \cdot 4 \cdot 4 - 1/4 \cdot 5 \cdot 5 - \dots$$

$$Q_3 = (1/2)(Q_1 + Q_2) \\ = (1/2)[(3 + 1/1^2 \cdot 2^2 + 1/2^2 \cdot 3^2 + 1/3^2 \cdot 4^2 + 1/4^2 \cdot 5^2 \dots)]$$

$$Q_4 = (1/3)(Q_2 + 2Q_3) \\ = (1/3)[5 - (1/2^2)(1 - 1^2) - (1/3^2)(1/2 - 1/2^2) - (1/4^2)(1/3 - 1/3^2) \\ - (1/5^2)(1/4 - 1/4^2) - \dots] \\ = 5/3 - 0 - (1/3^2) \cdot (1/2^2) - (1/4^2) \cdot (2/3^2) \\ - (1/5^2) \cdot (3/4^2) - (1/6^2) \cdot (4/5^2) - \dots$$

$$Q_5 = (1/5) \cdot (2Q_3 + 3Q_4) = (1/5) \cdot (Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3) \\ = (1/5)[8 + (2 - 2 + 1)/1^2 \cdot 2^2 + (3 - 4 + 1)/2^2 \cdot 3^2 + (4 - 6 + 1)/3^2 \cdot 4^2 \\ + (5 - 8 + 1)/4^2 \cdot 5^2 + (6 - 10 + 1)/5^2 \cdot 6^2 \dots] \\ = 8/5 + 1/5 \cdot 1^2 \cdot 2^2 + 0/5 \cdot 2^2 \cdot 3^2 - 1/5 \cdot 3^2 \cdot 4^2 - 2/5 \cdot 4^2 \cdot 5^2 - 3/5 \cdot 5^2 \cdot 6^2 - \dots$$

収束の速さを比較するため、各級数の初めの5項までの和を比較してみよう。

$$Q_1 = 1.623611\dots, \quad Q_2 = 1.663611\dots, \quad Q_3 = 1.643611\dots, \\ Q_4 = 1.6175, \quad Q_5 = 1.647611\dots$$

$Q_3$  と  $Q_5$  の値は  $Q$  に比較的近く、しかも、

$$Q_4 < Q_1 < Q_3 < Q < Q_5 < Q_2$$

の関係にある。 $Q_5$  の初項はダニエルの、 $Q_4$  の初項はゴルドバッハの右辺の根拠であり、ゴルドバッハの左辺はもう少し複雑な  $Q$  の変形に依る。

### 第3節 競争相手

オイラーと同時代人も、バーゼル問題に取り組んだ。スターリング(1692-1770)は[5]『差分法、又ハ総和ト補間ノ論考』(1730)[この著書の表題を微分法と訳すのは不適切である、内容に即して差分法と訳すのがよい]の命題IIで、

$$(*3\cdot1) \quad A/(x(x+1)) + B/(x(x+1)(x+2)) + C/(x(x+1)(x+2)(x+3)) + \dots \\ = A/x + B/(2x(x+1)) + C/(3x(x+1)(x+2)) + \dots$$

を証明した。この命題に続く例題IVでは、逆平方数の級数 $Q$ を求めるため、級数を巧妙に変形する。即ち $Q$ の級数を途中まで、まともに計算する。或る項  $1/u^2$  から後の項の和を  $P(u)$  と置く。これを求めるため、補助変数  $a, b, c, d, \dots$  を

$$(*3\cdot2) \quad a=1/u, \quad b=a/(u+1), \quad c=2b/(u+2), \quad d=3c/(u+3), \dots$$

の関係式で定めれば、後の項の和  $P(u)$  として、加速式

$$(*3\cdot3) \quad P(u) = a + b/2 + c/3 + d/4 + \dots$$

を得ることを証明した。前節の  $Q$  の様々なる変形に似た、巧妙な技巧に依る。

数値例として、 $Q(12) = 1 + 1/4 + 1/9 + \dots + 1/144 = 1.5946976638$  までは普通に計算する。これに、後の項の和

$$P(13) = 1/169 + ((1/169)/14)/2 + (2((1/169)/14)/15)/3 + \dots = 0.079957427$$

を加えて、 $Q = 1.644934065$  を示した。結果の先取りではあるが、 $Q$  は  $1.644934067$  だから、スターリングが計算したのは非常に良い値であった。

### 第4節 問題の本質

バーゼル問題には二つの側面がある。

- (1)  $Q$  を数値として出来る限り精密な値を求める。
- (2)  $Q$  の素性を尋ねる。周知のように  $Q$  は  $\pi^2/6$  に等しいのであるが、これは後知恵であり、当時は全く未知数であった。

ヤーコブ・ベルヌイが欲したのは $Q$ の精密な数値だけではない。 $Q$ それ自身の素性であった。当時、 $\pi$ を因数として含む積分値は、幾つも知られていた。しかし、数値としての  $1.644934\dots$  が  $\pi$ の平方を因数として含むなどとは、数値  $1.644934\dots$  をどう弄っても出てこない。彼のみならず、当時の誰もが、 $Q$ の素性を予想もしなかったのは当然である。私が知恵を絞っても考えつくのは、 $\pi/2=1.57$  と  $\pi/3=1.05$  の積が  $1.6485$  となる事くらいである。オイラー自身も後掲の第三論文で、「全ク思ヒガケズ、…円積問題ニ関係スル」と感嘆の言葉を述べた。彼の発見が注目されたのも当然である。スターリングは確かに $Q$ の精密な値を得たが、慎ましく著書の中の一つの例題として計算したので、余り知らなかった。

### 第5節 オイラーの執心

以下に述べるように、オイラーは本質的に異なる四つの解答を与えた。彼はヤーコブの弟ヨーハン・ベルヌイ(1667-1748)の生徒であり、甥ダニエル・ベルヌイの友人である。

オイラーがバーゼル問題に執心なのは必然性がある。以下オイラーの論文は、Eで始まるエネストレーム番号で引用する。これは、モーツァルト作品に付されたケツヒェル番号に相当する。年号は前の( )内が発表年、後の( )無しが印刷年である。彼が青年時代からこの問題に取り組んでいたことは、確かである。

逆平方数級数 $Q$ の和は、まともに足したのでは収束が甚だ緩慢である。例えば10項までの和 1.54976..., 100項までの和 1.63498..., 1000項までの和 1.64393..., 10000項までの和でさえも 1.64483... しか得られない。目標は  $Q=1.64493...$  である。既にヤーコブは多様な加速法を示した。恐らくオイラーも新たな加速法を模索したに違いない。

論文としての発表は二番目になるが、所謂オイラー・マクローリンの級数を見よう。

[6] E25 「増加スル項ヲ総和スル一般的方法」(1732/3), 1738. の内容と殆ど同じ内容が、オイラーとは独立に、マクローリン(1698-1746)の

[7] 『流率法ノ論考』1742

に示された。オイラーは、整数  $n$  を変数とする関数  $f(n)$  の和を  $F(n)$  とし、

$$(*5.1) \quad F(n)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$$

と置くと、実数  $x$  に対するテーラー展開が整数  $n$  の時にも成立すると見做して(このようにオイラーの進め方は乱暴であるが)、

$$(*5.2) \quad f(n)=F(n)-F(n-1)=dF/dn-(1/1\cdot2)d^2F/dn^2+(1/1\cdot2\cdot3)d^3F/dn^3-\cdots$$

と置いた。これを未定係数法で解くため、

$$(*5.3) \quad F(n)=\alpha \int f(n)dn+\beta f(n)+\gamma df/dn+\delta d^2f/dn^2+\varepsilon df^3/dn^3\cdots$$

と置いた。(未定係数法の使用は、当時、有力な手段であった。)式(\*5.2)と併せて次々に係数  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$  を定めて行けばよい。

$$(*5.4) \quad \alpha=1, \beta=1/2, \gamma=1/12, \delta=0, \varepsilon=-1/720, \zeta=0, \eta=1/30240, \\ \theta=0, \iota=-1/1209600, \dots$$

( $\delta$ 以降の項は一つ置きに  $=0$  となる)が次々に定まり、結局

$$(*5.5) \quad F(n)=\int f(n)dn+(1/2)f(n)+(1/12)df/dn+0-(1/720)df^3/dn^3+\cdots$$

が得られる。オイラーはまだこの段階で、係数が  $1/(e^u-1)$  の展開係数と関係することに気付いていない。(それは後にE130, (1740), 1750 で示された。)

(マクローリンもほぼこれと同じ展開を辿ったと思われる。)

各係数が明らかになったので、もう少し一般化し、 $k$  から  $m=k+n-1$  までの区間の和を考えると、次を得る。

$$(*5.6) \quad F(m)-F(k)=f(k+1)+f(k+2)+\cdots+f(m) \\ =\int_k^m f(n)dn+(1/2)[f(m)-f(k)]+(1/12)[df(m)-df(k)]/dn \\ - (1/720)[df(m)^3-df(k)^3]/dn+\cdots$$

オイラーは恐らくこの公式を用いて逆平方数級数 $Q$ の和を求めたと思われるが、論文には記載がないので、私が代わりに計算してみた。最初の9項の和は正直に求めると、

$$F(9)=1+1/4+1/9+1/16+1/25+\cdots+1/81=1.539767731166541$$

を得る。残りは式(\*5.6)を用いて  $f(n)$  の和を 10 から  $\infty$  まで求めると、

$$F(10) = 1/10 + (1/2) \cdot (1/10^2) + (1/6) \cdot (1/10^3) - (1/30) \cdot (1/10^5) \\ + (1/40) \cdot (1/10^7) - (1/30) \cdot (1/10^9) \cdots = 0.105166335680953.$$

両者の和  $Q = 1.644934066847494$  は、 $\pi^2/6 = 1.644934066848226$  と比べて、小数 11 位まで一致する。(オイラーの確信の根拠である。第 8 節を参照。)

## 第 6 節 双曲線対数を用いる方法

オイラーの最初の論文は、双曲線対数  $\log. hyp.$  の級数展開を用いる。オイラーは常に関数記号として  $\ell$  を用いるが、紛らわしいので本稿では  $\ell$  を用いることにする。

[8] E20 「無限ニ増加スル項ノ和」(1730/1), 1738.

は、論文の前半で導いた漸化式

$$(*6.1) \quad \int x^{n-1} dx \ell x = (x^n/n) \ell x - x^n/n^2$$

から出発し、 $y=1-x$ ,  $dy=-dx$  を用いて、級数

$$(*6.2) \quad \int -y^{-1} dy \ell (1-y) = \int (1-x)^{-1} dx \ell x = \int dx (1+x+x^2+x^3+\cdots) \ell x \\ = \int dx (\ell x + x \ell x + x^2 \ell x + x^3 \ell x + \cdots)$$

を導く。式(\*6.2)の左辺はオイラー時代の記法。現代なら  $\int (-y^{-1}) \log(1-y) dy$  と書くのが普通である。これを  $x=a$  から  $x=u$  まで積分すると、

$$(*6.3) \quad = u \ell u + (u^2/2) \ell u + (u^3/3) \ell u + \cdots - u - u^2/4 - u^3/9 - \cdots \\ - a \ell a - (a^2/2) \ell a - (a^3/3) \ell a - \cdots + a + a^2/4 + a^3/9 + \cdots$$

一方、元の式(\*6.2)のまま変形すると、

$$(*6.4) \quad \int -y^{-1} dy \ell (1-y) = \int y^{-1} dy (y + y^2/2 + y^3/3 + \cdots) \\ = \int dy (1 + y/2 + y^2/3 + \cdots) = y + y^2/4 + y^3/9 + \cdots$$

を得る。先の式(\*6.3)の第一部分  $(u + u^2/2 + u^3/3 + \cdots) \ell u = -\ell(1-u) \ell u$  に注目し、式(\*6.4)と併せると、

$$(*6.5) \quad Q = 1/1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + \cdots \\ = (y+u)/1 + (y^2+u^2)/4 + (y^3+u^3)/9 + \cdots + \ell y \cdot \ell u$$

ここまで  $y+u=1$  と仮定して来たが、さらに  $y=u$  と仮定すれば  $y=1/2=u$  となり、

$$(*6.6) \quad Q = 1/1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + \cdots \\ = 1/1 \cdot 1 + 1/2 \cdot 4 + 1/4 \cdot 9 + 1/8 \cdot 16 + 1/16 \cdot 25 + \cdots + (\ell(1/2))^2$$

という有効な式を得る。中辺の級数は分母が平方数だけなのに対して、右辺の級数は分母が平方数と 2 の乗幂との積となっているので、右辺のほう収束が早い。

オイラーは右辺の級数の和 1.164481 に  $(\ell(1/2))^2 = (\ell 2)^2 = 0.63147^2 = 0.480453$  を加えて、 $Q = 1.644934$  を得た。項数さえ増やせば幾らでも精密な値を求めることができる。第 4 節で述べたように、これは(1)の立場であって、 $Q$ の素性に迫ったわけではない。スターリングの著書(1730)の中の記述と同じ時期であるとは言え、オイラーが初めて独立の論文の形で  $Q$ の値を求める方法を確立したのである。勿論、現代的な観点から見れば、 $(\ell 1)(\ell 0)$ を平気で  $=0$  と置いたこととか、無断で項別積分を行なったことなど、欠陥はあるが、それらは当時普通に行なわれたのだから、彼だけの責任ではない。([3])

ダンハムは、現代的な立場からの合理化することは容易である、と言う。) それよりも、オイラーがバーゼル問題に精密な数値を与えるという、最初の楔を打ち込んだ功績を認めたい。

## 第7節 或る無限積

オイラーの有名な第三論文を紹介する前に、彼に潜在意識として作用した、と思われる[9] ウォリスの研究(1656)を見ておこう。ジョン・ウォリス(1616-1703)は、

$$(*7.1) \quad \square = \int dx(1-xx)^{1/2} \quad (x=0 \text{ から } x=1 \text{ まで積分})$$

の値を求めようとして、当時、積分 ( $x=0$  から  $x=1$  まで) が可能であった

$$(*7.2) \quad \int dx(1-x^{m/2})^{k/2} \quad [m \text{ と } k \text{ は整数、特に偶数}]$$

の値を多様に求め、それらの値を補間する事によって式 (\*7.1) の値を求めようとした。

[例えば、階乗  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$  は  $n$  が整数ならば容易だが、非整数の場合の値を求めるのは容易でない。式 (\*7.2) を求めるのは、階乗の  $(1/2)!$  の値を求めようとするときの、或る種の補間の方法に匹敵する。なお、青年オイラーが階乗  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots$  に異常な興味を抱いたことは、所謂《オイラー積分》の研究(私の[10]を参照)にある。]

ウォリスはその結果、中間的に

$$(*7.3) \quad (3/2)\square > (2/3)/(3/4)\square > (3/4)(15/8)\square > \cdots$$

を得た。これにより、 $1/\square$  は

$$(*7.4) \quad \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots 13 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 12 \cdot 14} \sqrt{1 \frac{1}{13}} > \frac{1}{\square} > \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots 13 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 12 \cdot 14} \sqrt{1 \frac{1}{14}}$$

なる二つの不等式に挟まれることを示した。明らかに  $1/\square = 4/\pi$  である。

オイラーは、恐らくウォリスの無限積を弄っている内に、

$$\begin{aligned} (*7.5) \quad 2/\pi &= (3/4) \cdot (15/16) \cdot (35/36) \cdot \cdots \\ &= (1-1/4) \cdot (1-1/16) \cdot (1-1/36) \cdot \cdots \\ &= (1-1/2) \cdot (1+1/2) \cdot (1-1/4) \cdot (1+1/4) \cdot (1-1/6) \cdot (1+1/6) \cdot \cdots \end{aligned}$$

なる変形に気付いたかも知れない。これは私の《発見学的な heuristic》空想であり、オイラーの雑記帳(ガウスにおける《ライステ》に相当するもの)が開示されなければ、確かめることは不可能であろう。

無限積は、形としては綺麗であるが、収束が甚だ遅くて、計算には適さない。例えば式 (\*7.4) に示した  $n=14$  項までの積 $\times$ 平方根 では

$$1.27498\cdots > 1.27323\cdots > 1.27172\cdots$$

しか求まらない。目標の  $1.27323\cdots$  に比べて、両側の数値はかなり遠い。

## 第8節 正弦関数の因数分解

第三論文の内容は、あらゆる機会に引用されて来たので、詳述するまでもない、と思われる。ここでは、[1]ポリア、[3]ダンハムを参照して、簡単に紹介するに止める。

[11] E41「逆数ノ級数ノ和ニ就イテ」(1734/5), 1740.

では、次のように推理を進める。

代数学の教える所、根 0 を持たない所の

(\*8.1)  $n$  次の方程式  $P(x)=0$  が  $n$  個の根  $a, b, c, \dots, \mu, \nu$  を持つならば、

$$(*8.2) \quad P(x) = (1-x/a)(1-x/b)(1-x/c)\cdots(1-x/\mu)(1-x/\nu)$$

と因数分解される。右辺を級数に展開すれば、

$$(*8.3) \quad P(x) = 1 - (1/a + 1/b + 1/c + \cdots + 1/\mu + 1/\nu)x \\ + (1/ab + 1/ac + \cdots + 1/bc + \cdots + 1/\mu\nu)x^2 + \cdots$$

ここで  $x$  の係数が  $-(1/a + 1/b + 1/c + \cdots + 1/\mu + 1/\nu)$  なることに注目する。

オイラーは、この有限次数の方程式の場合に成立する根と係数の関係が、飛躍して無限次数の方程式にも成立すると考えた(大胆な一般化!)。周知のように、級数展開

$$(*8.4) \quad P(x) = \sin x/x = 1 - x^2/1 \cdot 2 \cdot 3 + x^4/1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - + \cdots$$

の諸根(無限個ある)は  $\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$  である。この場合にも《因数分解》

$$(*8.5) \quad P(x) = \sin x/x \\ = (1-x/\pi)(1+x/\pi)(1-x/2\pi)(1+x/2\pi)(1-x/3\pi)(1+x/3\pi) \\ \cdots \\ = (1-x^2/\pi^2)(1-x^2/4\pi^2)(1-x^2/9\pi^2) \cdots$$

が成立するものとする。根と係数の関係によって(それは有限次数のとき成立するのであるが、無限次数のときにも成立すると飛躍して考える)、

$$(*8.6) \quad -1/1 \cdot 2 \cdot 3 = -(1/\pi^2 + 1/4\pi^2 + 1/9\pi^2 + \cdots)$$

または、両辺に  $-\pi^2$  を掛けて

$$(*8.7) \quad \pi^2/1 \cdot 2 \cdot 3 = \pi^2/6 = 1/1 + 1/4 + 1/9 + \cdots$$

を得る。

このオイラーが得た結果は、印刷される(1740)よりも前(1734~5)に手紙によって欧州を駆け巡った、と言われる。ヨーハン・ベルヌイは、「若シ私ノ兄が生キテ居タナラ!」と記した、と言う。

やがて異論も現れた(第1節の系図を参照)。ヤーコプの甥ダニエル・ベルヌイは、

「 $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \dots$  が方程式(\*8.5)の凡ての根であることを証明していない。」

と批判した。またヤーコプのもう一人の甥ニコラウス・ベルヌイ(1687-1759)も、

「方程式(\*8.5)の根  $\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$  以外に実根がないことは示したが、その他に虚根が有り得ないことを証明していない。」

と批判した。

しかし、オイラーは、先に求めた  $1.644934066847494$  なる値が  $\pi^2/6$  と小数 11 桁も一致すること(一致は  $1/10^{11}$  の確率でしか生じないほど稀有のこと)から、絶対の確信は揺らがなかった。



## 第9節 円積分の漸化式

オイラーはずっと後になって、フランス語の第四論文(1743)

[12] E 63「次の級数  $1+1/4+1/9+1/16+1/25+1/36+\text{etc.}$  の和の証明」1743.  
を書いた。円積分  $s$  とその微分  $ds$  を

$$(*9.1) \quad s = \int dx / \sqrt{(1-xx)}, \quad ds = dx / \sqrt{(1-xx)}$$

で定義した。 $s$  を  $x=0$  から  $x=1$  まで積分すれば、 $=\pi/2$  となることは明らかである。以下の記述を簡明にするため、[オイラーが用いなかった記号を導入して]

$$(*9.2) \quad S(n) = \int x^n dx / \sqrt{(1-xx)}, \quad dS(n) = x^n dx / \sqrt{(1-xx)}$$

と定義する。オイラーは  $s$  と  $ds$  の積を作り、級数展開する。

$$(*9.3) \quad s \cdot ds = S(1) + (1/2 \cdot 3)S(3) + (1 \cdot 3/2 \cdot 4 \cdot 5)S(5) + (1 \cdot 3 \cdot 5/2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7)S(7) + \dots$$

ここに周知の部分積分の公式

$$(*9.4) \quad S(n+2) = ((n+1)/(n+2))S(n) - x^{n+1} \sqrt{(1-xx)} / (n+2)$$

を代入して、 $x=0$  から  $x=1$  まで積分すれば、後項は  $=0$  となるので、

$$(*9.5) \quad S(1)=1, \quad S(3)=(2/3)S(1)=2/3, \quad S(5)=(4/5)S(3)=2 \cdot 4/3 \cdot 5, \\ S(7)=(6/7)S(5)=2 \cdot 4 \cdot 6/3 \cdot 5 \cdot 7, \quad \dots$$

これを式(\*9.3)に代入して  $x=0$  から  $x=1$  まで積分すれば、

$$(*9.6) \quad \int s \cdot ds = (1/2)ss = \pi^2/8 = S(1) + S(3) + S(5) + \dots \\ = 1/1 + 1/3 \cdot 3 + 1/5 \cdot 5 + \dots$$

を得る。所が  $Q - (1/4)Q = (3/4)Q = 1 + 1/9 + 1/25 + \dots$  だから、

$$(*9.7) \quad Q = 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + \dots = (4/3) \cdot \pi^2/8 = \pi^2/6$$

なる目標に到達する。(オイラーは記号  $S(n)$  を用いず、一々積分式で書いた。)

[3] ダンハムは、この証明は洗練されていて、現代の規準にも合致すると言う。

この論文の後半には  $1 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + 1/5^4 + \dots = \pi^4/90$  等、分母の冪指数が一般化された場合も述べてある。

## 第10節 ゼータ関数への進化

オイラーの主著

[13] 『無限解析序説』(高瀬正仁氏の翻訳によって近づき易くなった。)

では、 $Q = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + \dots$  や  $1 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + 1/5^4 + \dots$  等の扱い方も洗練されていて、現代のゼータ関数  $\zeta(x)$  の源泉となった。

しかしながら、今回私が発表するのはあくまでも歴史的な形成を跡付ける立場であり、逆平方数の級数が如何にしてオイラーによって突き止められたか、また如何にして円周率の平方という、全く予想を超えた数値と結びつくに到ったかを辿ることであった。

私は第7節で述べ、また[10]数学シンポジウムで述べたように、オイラーからガウスへの影響を調べるのが本来の目標である。その準備を進めるうちに、ヤーコプ・ベルヌイからオイラーへの影響も調べてみた。その一部を報告した次第である。

## 文献

文献参照の便宜を賜った長岡一昭（津田塾大）、高瀬正仁（九州大）両氏に感謝する。

- [1] G. Polya : Mahematical and plausible reasoning, vol. I & vol. II, Princeton U. P. 1954, 2nd ed. 1968. ポリア著、柴垣和三郎訳、数学における発見はいかになされるか、1、帰納と類比、2、発見的類比、丸善、1959。（特に1巻、II章が、オイラーの発見を詳述する。）
- [2] A. Weil : An approach through history, ..., Birkhäuser, 1983. ヴェイユ著、足立恒雄・三宅克也訳、数論－歴史からのアプローチ、日本評論社、1987.
- [3] W. Dunham : Euler : The master of us all, Springer, 1999. ダンハム著、黒川信重・若山正人・百々谷哲也訳、オイラー入門、シュプリンガー東京、2004.
- [4] Jakob Bernoulli : Positionum de seriebus infinitis, in Die Werke von Jakob Bernoulli, Birkhäuser, 1993. （ヤーコプ・ベルヌイ、無限級数ノ扱ヒ、全5編。この内、第I編で逆数の級数等を扱い、逆平方数の級数についての告白がある。）ドイツ語訳、Übersetzt von G. Kowarewski : Über unendliche Reihen, Ostwald's Klassiker Nr.171, Leipzig, 1909.
- [5] James Stirling : Methodus Differentialis : sive Tractus de summatione et interpolatione serierum infinitorum, London, 1730. （世にスターリングの公式のみ有名だが、本書には無限級数の総和と補間に関して、詳細な記述がある。）英訳、Ian Tweddle : James Stirling's Methodus Differentialis : An annotated translation of Stirling's text, Springer, 2003.
- [6] E25, Leonhard Euler : Methodus generalis summandi progressionem, Com. acad. scient. Petropol., 6, (1732/3), 1738.
- [7] Colin Maclaurin : Treatise of fluxions, Edinburgh, 1742.
- [8] E20, Leonhard Euler : De summatione innumerabilium progressionum, Com. acad. scient. Petropol., 5, (1730/1), 1738.
- [9] John Wallis : Arithmemetica infinitorum, Cambridge, 1656.
- [10] 杉本敏夫 : オイラー積分とガウス、2006. 10, 津田塾大学、数学シンポジウム〔翌年印刷された〕。さらに、オイラー積分とガウス（続）を 2007. 10 に報告。
- [11] E41, Leonhard Euler : De summis serierum reciprocarum, Com. acad. scient. Petropol., 6. (1734/5), 1740.
- [12] E63, Leonhard Euler : Démonstration de la somme de cette suite  $1+1/4+1/9+1/16+1/25+1/36+\text{etc.}$ , J. litter. d'Allemagne, de Suiss et du Nord (La Haye) 2 : 1, 1743.
- [13] E101, Leonhard Euler : Introductio in analysin infinitorum, Tomus primum, (1745), 1748. オイラー著、高瀬正仁訳：オイラーの無限解析、海鳴社、2001.